Solution: Projecteurs

1. **Etude d'un projecteur**

   (a) Procédons par analyse-synthèse.
   Analyse: Supposons que pour tout élément $x \in E$, il existe $(y,z) \in Im(p) \times Ker(p)$ tels que $x = y + z$. Alors, en composant par p, nous obtenons $p(x) = p(y+z) = p(y) + p(z)$. Or, $z \in Ker(p)$ donc $p(z) = 0$ et $y \in Im(p)$ donc il existe $a \in E$ tel que $y = p(a)$ d'où $p(y) = p^2(a) = p(a) = y$ puisque p est un projecteur. Il s'ensuit donc que $y = p(x)$, et donc $z = x - p(x)$: cela constitue donc une condition nécessaire à l'existence de la décomposition de $x \in E$ comme somme d'un élément de $Im(p)$ et d'un élément de $Ker(p)$.
   Synthèse: Soit $x \in E$ et posons $x = p(x) + (x - p(x))$. Nous avons évidemment $p(x) \in Im(p)$: vérifions alors que $x - p(x) \in Ker(p)$. Nous avons $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ car p est un projecteur donc $p^2 = p$. Il s'ensuit donc que $x - p(x) \in Ker(p)$ d'où $E = Im(p) + Ker(p)$.
   La somme est directe d'après la phase d'analyse: en effet, nous avons obtenue une condition nécessaire sur y et z, d'où l'unicité de la décomposition, et donc le fait que la somme soit directe.

   Pour montrer que la somme est directe, on peut bien sûr montrer que $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$, mais l'argument de la condition nécessaire à l'issue de la phase d'analyse est parfois plus pratique à mettre en oeuvre

   (b) Considérons $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de $Ker(p)$ et $(e_{k+1}; \cdots; e_n)$ une base de $Im(p)$. De la somme directe $E = Ker(p) \oplus Im(p)$, nous déduisons que la concaténation $(e_1, \cdots, e_n)$ de ces deux bases forme une base de E. Or, p laisse invariant tout élément de $Im(p)$ (puisque $p^2 = p$) et est nul sur $Ker(p)$, d'où dans cette base, la matrice de p est diagonale $D = diag(\underbrace{0; 0; 0; \cdots; 0}_{k \quad fois}; \underbrace{1; 1; \cdots; 1}_{n-k \quad fois})$.

   Un endomorphisme de E est parfaitement défini par ses restrictions à des s.e.v. supplémentaires.

   Le rang de l'endomorphisme p, défini par $rg(p) = dim Im(p)$ est égal à la trace de cet endomorphisme

2. **Projection**

   (a) Soit $x \in E$. Comme $E = F \oplus G$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Aussi, $p(x) = x_F$ et comme $x_F \in F$ on en déduit que $p(x_F) = x_F$ d'où $p \circ p = p$.

   (b) Nous avons alors $Im(p) = F$ et $Ker(p) = G$.

   On a donc bien $E = Im(p) \oplus Ker(p)$

3. **Avec deux projecteurs**

   (a) Soient p et q deux projecteurs et supposons qu'ils ont même noyau: $Ker(p) = Ker(q)$. Montrons alors que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Comme p et q sont des projecteurs, nous avons donc $E = Ker(p) \oplus Im(p) = Ker(q) \oplus Im(q)$ et $Ker(p) = Ker(q)$. Soit donc $x \in E$. x s'écrit donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker(q)$ et $x_2 \in Im(q)$ (soit $q(x_2) = x_2$). Aussi, $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2)$ car $Ker(q) = Ker(p)$. De même, $p \circ q(x) = p(q(x_1 + x_2)) = p(\underbrace{q(x_1)}_{=0_E}) + p(\underbrace{q(x_2)}_{=x_2}) = p(x_2)$. On en déduit alors que $p = p \circ q$.
   On procède de même pour montrer que $q \circ p = q$.
   Réciproquement, supposons que les projecteurs p et q vérifient $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ et montrons qu'ils ont même noyau. Soit $x \in Ker(p)$. Alors $q(x) = q \circ p(x) = q(\underbrace{p(x)}_{=0_E}) = 0_E$ d'où $Ker(p) \subset Ker(q)$. On montre de même l'inclusion réciproque d'où $Ker(p) = Ker(q)$.

   Attention, le fait que $Ker(p) = Ker(q)$ n'implique pas que $Im(p) = Im(q)$ car il n'y a pas unicité du supplémentaire.

   Pour montrer l'égalité de deux applications, on montre qu'elle sont égales sur tout élément $x \in E$

   Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on procède par double inclusion

4. **Somme de deux projecteurs**

   (a) L'endomorphisme $p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p+q)^2 = p + q$, soit $p^2 + q^2 + p \circ q + q \circ p = p + q$. Or, $p^2 = p$ et $q^2 = q$ d'où il s'ensuit que $p \circ q + q \circ p = 0$.
   Réciproquement, si cela est vrai, nous obtenons bien que $(p+q)^2 = p + q$ d'où $p + q$ est un projecteur.

   La composition des endomorphismes n'est pas commutative, donc ne par utiliser les formules d'identités remarquables ou le binôme de Newton...

(b) Supposons à présent que $p+q$ soit un projecteur. Montrons que $p\circ q = q\circ p = 0$. D'après la question précédente, nous savons que $p\circ q = -q\circ p$. Aussi, par associativité de la composition, nous avons $p\circ q\circ p = (p\circ q)\circ p = (-q\circ p)\circ p = -q\circ p$ et $p\circ q\circ p = p\circ(q\circ p) = p\circ(-p\circ q) = -p\circ q$. Nous en déduisons alors que $p\circ q = q\circ p$ et comme, par la question précédente, $p\circ q = -q\circ p$ il s'ensuit que $p\circ q = q\circ p = 0$.

Montrons alors l'égalité $Im(p+q) = Im(p)\oplus Im(q)$.
L'inclusion $Im(p+q)\subset Im(p)+Im(q)$ est évidente.
Montrons l'inclusion récipoque: soit $p(x_1)+q(x_2)\in Im(p)+Im(q)$. Remarquons alors que $(p+q)(p(x_1)+q(x_2)) = p(p(x_1)+q(x_2))+q(p(x_1)+q(x_2)) = \underbrace{p\circ p(x_1)}_{=p(x_1)}+\underbrace{p\circ q(x_2)}_{=0_E}+\underbrace{q\circ p(x_1)}_{=0_E}+\underbrace{q\circ q(x_2)}_{=q(x_2)} =$ $p(x_1)+q(x_2)$ d'où $p(x_1)+q(x_2)\in Im(p+q)$. On montre ainsi l'égalité $Im(p+q) = Im(p)+Im(q)$. Reste alors à montrer que la somme est directe: soit $z\in Im(p)\cap Im(q)$ ie. $z = p(x) = q(y)$. En appliquant p à cette égalité, nous avons alors $p\circ p(x) = p\circ q(y)$ d'où $p(x) = 0_E$ donc $z = 0_E$ et la somme est bien directe.

(c) L'inclusion $Ker(p)\cap Ker(q)\subset Ker(p+q)$ est évidente.
Montrons l'inclusion réciproque: soit $x\in Ker(p+q)$. Alors $p(x)+q(x) = 0$. Or, 0 s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $Im(p)$ et d'un élément de $Im(q)$ (car $Im(p+q) = Im(p)\oplus Im(q)$). Il s'ensuit donc que $p(x) = q(x) = 0$ et donc $Ker(p+q)\subset Ker(p)\cap Ker(q)$.
On a donc bien l'égalité souhaitée.

On utilise ici le fait que $(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, c'est-à-dire que $(\mathcal{L}(E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau non commutatif.

5. **Projecteurs qui commutent**

Déjà, $p\circ q$ est bien un endomorphisme en tant que composée de deux endomorphismes de E. Nous savons que $p^2 = p$ et $q^2 = q$ puisque p et q sont des projecteurs. De plus, comme p et q commutent, nous avons $(p\circ q)^2 = p\circ q\circ p\circ q = p^2\circ q^2 = p\circ q$, donc est lui-même un projecteur.
Les inclusions $Im(p\circ q)\subset Im(p)$ et $Im(q\circ p)\subset Im(q)$ sont évidentes. Aussi $p\circ q = q\circ p$ implique que $Im(p\circ q)\subset Im(p)\cap Im(q)$.
Réciproquement, si $x\in Im(p)\cap Im(q)$, alors puisque p et q sont des projecteurs, $p(x) = x$ et $q(x) = x$. Aussi $p\circ q(x) = x$ d'où $x\in Im(p\circ q)$, et donc $Im(p)\cap Im(q)\subset Im(p\circ q)$.
On a donc, par double inclusion, que $Im(p\circ q) = Im(p)\cap Im(q)$.

Pour montrer que $A\subset B\cap C$, il suffit de montrer que $A\subset B$ et $A\subset C$

Nous avons clairement $Ker(p)\subset Ker(q\circ p)$ et $Ker(q)\subset Ker(p\circ q)$, donc comme $p\circ q = q\circ p$, nous en déduisons que $Ker(p)+Ker(q)\subset Ker(p+q)$.
Montrons l'inclusion réciproque: soit $x\in Ker(p+q)$. Alors $x = q(x)+x-q(x)$. Or, $q(x)\in Ker(p)$ puisque $p(q(x)) = p\circ q(x) = 0$ et $x-q(x)\in Ker(q)$ puisque $q(x-q(x)) = q(x)-q^2(x) = q(x)-q(x) = 0$. Il s'ensuit donc que $x\in Ker(p)+Ker(q)$, d'où l'inclusion $Ker(p+q)\subset Ker(p)+Ker(q)$. On obtient donc l'égalité souhaitée par double inclusion.

Si A,B,C sont des s.e.v. de E et $A\subset C$ et $B\subset C$, alors $A+B\subset C$. $A+B$ est le plus petit s.e.v. de E contenant à la fois A et B.

6. **Un projecteur et un endomorphisme**

Comme p projecteur, nous avons la décomposition en supplémentaires $E = Ker(p = \oplus Im(p)$

(a) Soit donc p un projecteur et f un endomorphisme. Supposons que $x\in Ker(f\circ p)$. Alors il existe un unique couple $(x_1;x_2)\in Ker(p)\times Im(p)$ tel que $x = x_1+x_2$. Aussi, $f\circ p(x) = 0_E$ implique $f\circ p(x_1)+f\circ p(x_2) = f(x_2) = 0_E$ d'où $x_2\in Ker(f)$. Aussi, $x_2\in Ker(f)\cap Im(p)$ et on a bien $x = x_1+x_2\in Ker(p)+(Im(p)\cap Ker(f))$. La somme est directe car nous avons l'inclusion $Im(p)\cap Ker(f)\subset Im(p)$.
Réciproquement, soit $x_1\in Ker(p)$ et $x_2\in Ker(f)\cap Im(p)$. Alors $f\circ p(x_1+x_2) = f(\underbrace{p(x_1)}_{=0_E})+f(\underbrace{p(x_2)}_{=x_2}) = f(x_2) = 0_E$.

Bien exploiter les inclusions ici

(b) Montrons que $Im(p\circ f) = Im(p)\cap(Im(f)+Ker(p))$. Soit donc $x\in Im(p\circ f)$. De l'inclusion $Im(p\circ f)\subset Im(p)$ nous déduisons que $p(x) = x$. Aussi, il existe $y\in E$ tel que $x = p(f(y))$. Or, $p(x) = x$ donc $p(x) = p(f(y))$ soit par linéarité de p, $p(x-f(y)) = 0_E$ ou encore $x-f(y)\in Ker(p)$. Donc de l'égalité $x = f(y)+(x-f(y))$ nous déduisons que $x\in Im(f)+Ker(p)$. On a donc bien que $Im(p\circ f) = Im(p)\cap(Im(f)+Ker(p))$.

7. **Avec deux projecteurs**

(a) Montrons que la somme $Im(q)+(Ker(p)\cap Ker(q))$ est directe. On vérifie déjà que $Im(q)$ et $(Ker(p)\cap Ker(q))$ sont bien des sous-espaces vectoriels de E. Considérons alors $x\in Im(q)\cap(Ker(p)\cap Ker(q))$. En particulier, $x\in Im(q)\cap Ker(q) = \{0_E\}$ puisque q est un projecteur d'où la somme est directe.

(b) Supposons à présent que $p \circ q$ est un projecteur, c'est-à-dire que $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$, et soit $x \in Im(p \circ q)$. Nous avons $q(q(x) - x) = q(x) - q(x) = 0_E$ d'où $q(x) - x \in Ker(q)$. De même, $p(q(x) - x) = p \circ q(x) - p(x) = (p \circ q)(x) - p(x) = x - p(x)$ Or, de l'inclusion $Im(p \circ q) \subset Im(p)$ nous déduisons que $x \in Im(p)$ soit $p(x) = x$ et donc $p(q(x) - x) = 0_E$ soit $q(x) - x \in Ker(p)$. On montre bien que $q(x) - x \in Ker(p) \cap Ker(q)$.

De l'inclusion $Ker(p) \cap Ker(q) \subset Ker(q)$, nous déduisons que $Im(q) \cap (Ker(p) \cap Ker(q)) = \{0_E\}$, donc la somme $Im(q) + (Ker(p) \cap Ker(q))$ est directe. A présent, soit $x \in Im(p) \cap (Im(q) + Ker(p))$. Aussi, $x = q(y) + z$ avec $y \in E$ et $z \in Ker(p)$. Or, $x \in Im(p)$ d'où $p(x) = x$. Or, $x = p(x) = p(q(y) + z) = p \circ q(y) \in Im(p \circ q)$. Par la question précédente, nous savons alors que $q(x) - x \in Ker(p) \cap Ker(q)$. Aussi, $x = \underbrace{q(x)}_{\in Im(q)} + \underbrace{x - q(x)}_{\in Ker(p) \cap Ker(q)}$ d'où $x \in Im(q) + (Ker(p) \cap Ker(q))$. On en déduit alors l'inclusion souhaitée.

(c) Supposons alors que $Im(p \circ q) \subset Im(q) \oplus (Ker(p) \cap Ker(q))$. Montrons que $p \circ q$ est un projecteur. Soit $t \in E$ quelconque et considérons $x = p \circ q(t)$. Il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in Im(q) \times (Ker(p) \cap Ker(q))$ tel que $x = x_1 + x_2$. $p \circ q(x) = p \circ q(x_1) + p \circ q(x_2) = p(x_1)$. Or, $x \in Im(p)$ donc $p(x) = x$ et donc $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1)$ donc $p \circ q(x) = x$. Il s'ensuit donc que $p \circ q$ est un projecteur de E.