Examen terminal d'arithmétique

Triplets Pythagoriciens

Partie I: Restriction de la recherche

1. Supposons que (a, b, c) est un triplet pythagoricien, donc nous avons $a^2+b^2 = c^2$. Aussi, pour tout entier naturel n, nous avons en multipliant la précédente égalité par n que $(na)^2+(nb)^2 = (nc)^2$ d'où (na, nb, nc) est aussi un triplet pythagoricien.
   Réciproquement, supposons que (na, nb, nc) soit un tel triplet. Alors nous avons $(na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$ d'où en divisant par $n^2 \neq 0$ nous obtenons que $a^2 + b^2 = c^2$. Il s'ensuit donc que (a, b, c) est un triplet pythagoricien.

   Question facile ici, que l'on peut traiter par équivalence, mais cela ne coûte rien d'écrire les 2 implications et ainsi ne pas se poser de questions

2. Supposons par exemple que $d \neq 1$ soit un diviseur commun de a et b: alors $a = da'$ $b = db'$ d'où comme $c^2 = a^2 + b^2 = d^2(a'^2 + b'^2)$ nous en déduisons que $d^2|c^2$, ce qui implique que $d|c$. On procède de même pour les deux autres cas (d diviseur commun de a et c ou de b et c) et l'on en déduit que si $d \neq 1$ divise deux des trois entiers (a, b, c), alors il divise aussi le troisième.

   Lemme: Si $d^2|c^2$, alors $d|c$. Pour le démontrer, le plus simple est de passer par la décomposition en nombres premiers de d: si p premier et $p|d$ alors $p^2|d^2$ d'où $p^2|c^2$. Il s'ensuit que p apparaît dans la décomposition en nombres premiers de c.

3. Déjà, puisque (a, b, c) est un triplet pythagoricien irréductible, (a, b, c) sont deux à deux premiers entre eux: aussi, au plus un seul d'entres eux est pair.
   De l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$, nous déduisons que a, b, c ne peuvent être tous trois impairs (car le carré d'un nombre impair est impair et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair). Aussi, exactement l'un des nombres a, b, c est pair.

   Etre pair est être divisible par 2: s'il y a deux nombres pairs dans a, b, c, alors ces deux nombres là ne sont pas premiers entre eux

4. Raisonnons par l'absurde en supposons que c est pair, et donc a et b sont des entiers impairs. Aussi, il existe a' et b' tels que $a = 2a' + 1$ et $b = 2b' + 1$, et nous avons $a^2 + b^2 = c^2$ qui devient $c^2 = (4a'^2 + 4a' + 1) + (4b'^2 + 4b' + 1) = 4a'^2 + 4a' + 4b'^2 + 4b' + 2$: aussi, nous avons que $c^2 \equiv 2 \mod 4$. Or, par hypothèse, c est pair d'où $c = 2c'$ et donc $c^2 = 4c'^2$ soit $c^2 \equiv 0 \mod 4$. Nous en déduisons alors une contradiction.

   La technique ici est de regarder c^2 modulo 4: si c est pair, alors $c^2 \equiv 0 \mod 4$

Partie II: Détermination de tous les triplets irréductibles

1. (a) Le triplet pythagoricien irréductible (a, b, c) étant rangé, nous en déduisons que a et c sont des nombres impairs. Aussi, $a + c$ et $c - a$ sont des nombres pairs (on peut remarquer qu'ils sont positifs puisque c est la longueur de l'hypothènuse du triangle rectangle: aussi $c > a$). Aussi, il existe $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $c + a = 2q$ et $c - a = 2r$.
   Enfin, puisque (a, b, c) est un triplet pythagoricien, nous avons $a^2 + b^2 = c^2$, soit $b^2 = c^2 - a^2 = (c - a) \times (c + a) = 4qr$. De $b = 2p$ nous déduisons que $b^2 = 4p^2$ d'où $p = qr$.

   Il suffit ici d'utiliser le fait que la somme ou la différence de deux nombres impairs est un nombre pair

   (b) Supposons que d est un diviseur commun de q et r. Alors d divise $q = \frac{1}{2}(c + a)$ et $r = \frac{1}{2}(c-a)$, il divise $q+r = c$ et $q-r = a$. Or, a et c sont premiers entre eux (le triplet (a, b, c) étant irréductible); il s'ensuit donc que $d = 1$ et donc q et r sont premiers entre eux.

   Méthode *Ici, on considère un diviseur d commun de q et r et on montre que $d = 1$. On pourrait aussi considérer par l'absurde que $d \neq 1$ ou encore (toujours par l'absurde) qu'il existe p premier tel que $p|q$ et $p|r$*

   (c) Considèrons la relation $p^2 = qr$: comme $q \wedge r = 1$, les facteurs premiers de p^2 sont soit dans la décomposition en facteurs premiers de q, soit dans la décomposition en facteurs premiers de r. Il s'ensuit alors que q et r sont des carrés.

   Question technique: à passer dans un premier temps. L'écriture formelle de la solution: posons $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de p. Aussi, $p^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a soit $p_i^2|r$ soit $p_i^2|q$: aussi, les puissances des facteurs premiers de q et r sont toujours des nombres pairs et il s'ensuit que q et r sont des carrés

   (d) Nous savons que q et r sont premiers entre eux: aussi, $u^2 = q$ et $v^2 = r$ le sont aussi. Il s'ensuit alors que u et v sont premiers entre eux.

   Lemme: Si $u^2 \wedge v^2 = 1$ alors $u \wedge v = 1$. Soit d un diviseur de u et v. Alors $d|u$ implique $d|u^2$ et de même on a $d|v^2$. Aussi, d est un diviseur commun de u^2 et v^2 qui sont premiers entre eux: il s'ensuit que $d = 1$

   (e) En reprenant les notations précédentes, nous avons alors $a = q-r = u^2-v^2$, $c = q+r = u^2 + v^2$ et $b = 2uv$.

2. Soient donc u, v deux entiers naturels $(u > v)$ de parités différentes et premiers entre eux, et posons $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$. Nous avons alors $a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = c^2$. Il s'ensuit alors que (a, b, c) est bien un triplet pythagoricien.
   u et v étant de parité différente, nous en déduisons que a et c sont des nombres impairs et

comme b est pair, il s'ensuit que ce triplet est bien rangé.
Enfin, vérifions qu'il est bien irréductible: d est un diviseur commun de a et c, alors d divise aussi $a+c=2u^2$ et $c-a=2v^2$. Comme a et c sont impairs, $d \neq 2$ d'où nous en déduisons que $d|u^2$ et $d|v^2$. De $u \wedge v = 1$, nous déduisons que $d=1$ et donc a et c sont premiers entre eux. Nous pouvons alors conclure au fait que (a,b,c) sont deux à deux premiers entre eux: en effet si d est un diviseur commun de deux de ces nombres alors par la question **I.2** il serait diviseur commun des trois et nous venons de montrer que a et c sont premiers entre eux.

Partie III: Résolution de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$

Note: Cette partie est inspirée d'un problème du Capes 2012, épreuve 2

1. Nous trouvons que $(3,2)$ est la plus petite solution (au sens de l'ordre choisi) de (E).

Il suffit d'essayer: pour $y=1$, aucune solution de $x^2-2=1$, pour $y=2$ il faut trouver un entier x vérifiant $x^2-8=1$...

2. (a) Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n:
Initialisation: Au rang $n=1$ On pose $x_1=2$ et $y_1=2$ d'où $x_1+y_1\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$.
Hérédité: Supposons l'existence, pour $n \geqslant 1$, d'un couple $(x_n,y_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} &= (3+2\sqrt{2}) \times \left(3+2\sqrt{2}\right)^n \\ &= (3+2\sqrt{2}) \times \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right) \\ &= \underbrace{3x_n+4y_n}_{=x_{n+1}} + \underbrace{(2x_n+3y_n)}_{=y_{n+1}}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Autre méthode: *Il est aussi ici possible d'obtenir une relation d'ordre 2 entre x_{n+2}, x_{n+1} et x_n puis d'utiliser le résultat sur les suites récurrentes d'ordre 2*

En posant $x_{n+1}=3x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=2x_n+3y_n$, nous obtenons bien l'existence de deux entiers tels que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} = x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}$.
Aussi nous en déduisons bien par le théorème de la récurrence qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n+\sqrt{2}y_n$.
Nous avons alors les formules: $x_{n+1}=3x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=2x_n+3y_n$

(b) $\chi_A(X) = X^2-6X+1 = \left(X - \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(X-\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)$. Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, nous en déduisons que A est diagonalisable (et de forme diagonale $D = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. Nous obtenons pour vecteurs propres les vecteurs $\begin{pmatrix}1 \\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 \\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Aussi, la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Pour cette question, il faut savoir utiliser sa calculatrice!

(c) Nous avons $\begin{pmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}$. Aussi, par récurrence, nous obtenons immédialement que $\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}x_1 \\ y_1\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix}$. Comme $P^{-1}AP=D$ nous en déduisons que $A^k = PD^kP^{-1}$ d'où nous obtenons bien l'expression $\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix} = PD^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix}$. En effectuant les calculs, nous obtenons alors les formules souhaitées.

Ici, les solutions vous sont données ... inutile de perdre trop de temps là dessus

3. Nous allons démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, le couple (x_n,y_n) est solution de l'équation (E).
Initialisation: Nous avons vu que $x_1=3$ et $y_1=2$: or, par **II.1**, $(3,2)$ est solution de l'équation (E) d'où la propriété est vraie au rang 1.
Hérédité: Supposons donc que pour $n \geqslant 1$, $(x_n;y_n)$ est solutions de (E), c'est-à-dire que $x_n^2-2y_n^2=1$. Montrons alors que (x_{n+1},y_{n+1}) est aussi solution de (E). Nous avons les formules de récurrences $x_{n+1}=3x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=2x_n+3y_n$. Aussi, $x_{n+1}^2-2y_{n+1}^2 = (3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2 = 9x_n^2+24x_ny_n+16y_n^2-(8x_n^2+12x_ny_n+18y_n^2) = x_n^2-2y_n^2 = 1$ par hypothèse de récurrence d'où $(x_{n+1};y_{n+1})$ est bien solution de l'équation (E).
On démontre ainsi par récurrence sur n que, pour tout $n \geqslant 1$, (x_n,y_n) est solution de (E).

Partie IV: Triplets pythagoriciens cousins

1. Supposons que (a, b, c) soit un triplet pythagoricien cousin. On peut alors remarquer que deux entiers consécutifs sont nécessairement premier entre eux (sinon $d|k$ et $d|k+1$ donc $d|1$ d'où $d = 1$). Il s'ensuit donc que tout triplet pythagoricien cousin est irréductible.

2. **Triplets pythagoriciens cousins du premier type** D'après la partie I, nous savons que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$. Si b et c sont consécutifs, alors $c = b+1$ d'où $(u-v)^2 = 1$. Il est donc nécessaire que u et v soient consécutifs: comme $u > v$, il s'ensuit que $u = v + 1$. On a donc $a = u^2 - v^2 = 2v + 1$, $b = 2uv = 2v(v + 1)$ et $c = u^2 + v^2 = 2v(v + 1) + 1$. On obtient ainsi tous les triplets pythagoriciens cousins du premier type. On a par exemple $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$ ....

3. **Triplets pythagoriciens cousins du second type**
En utilisant les notations de la partie I, nous avons $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ d'où $a - b = 1$ si $u^2 - v^2 - 2uv = 1$, soit $(u - v)^2 - 2v^2 = 1$. En posant $x = u - v$ et $y = v$, on reconnaît alors l'équation de Pell-Fermat étudiée dans la partie III. Nous en déduisons alors qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $u - v = x_n$ et $v = y_n$ soit $u = x_n + y_n$ et $v = y_n$. On en déduit alors que $a = u^2 - v^2 = (x_n + y_n)^2 - y_n^2 = x_n^2 - 2x_n y_n$; $b = 2uv = 2(x_n + y_n)y_n$ et $c = u^2 + v^2 = x_n^2 + 2x_n y_n + 2y_n^2$.

Pour simplifier le sujet, je n'ai pas pris l'autre cas où $b - a = 1$: il faut résoudre une équation de Pell-Fermat très similaire, on obtient des solutions etc... c'est quasiment la même chose!